§ 9. РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА

Как известно, уравновешенный (астатический) гироскоп может совершать регулярную прецессию по инерции без действия внешних сил. По приближенной теории получается, что прецессия может быть вызвана только действием внешних сил. Очевидно, допущения приближенной теории позволяют рассмотреть прецессионное движение гироскопа с точностью до некоторой регулярной прецессии, существовавшей до действия внешних сил. Если этой начальной прецессии по инерции нет, то приближенная теория находится в соответствии с точной теорией.

Рассмотрим случай регулярной прецессии гироскопа. Известно, что регулярной прецессией гироскопа называют такое его движение, при котором угловые скорости собственного вращения и прецессии постоянны, прецессия происходит вокруг оси постоянного направления и угол нутации, т. е. угол между осью собственного вращения и осью прецессии, тоже является постоянным.

Получим формулу для гироскопического момента при регулярной прецессии и рассмотрим ее следствия.

Гироскопический момент при регулярной прецессии

В случае регулярной прецессии мгновенная угловая скорость гироскопа

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2,$$

где $\bar{\omega}_1$ — собственная угловая скорость, направленная по оси гироскопа Oz; $\bar{\omega}_2$ — угловая скорость прецессии, направленная по неподвижной оси Oz_1 (рис. 150).

Если выбрать ось Ox в экваториальной плоскости эллипсоида инерции так, чтобы она лежала в плоскости осей Oz и Oz_1, то для проекции $\bar{\omega}$ на подвижные координатные оси $Oxyz$, жестко скрепленные с гироскопом, имеем:

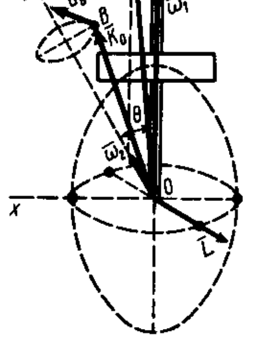

Рис. 150

$$\omega_x=\omega_2\sin\theta;\quad \omega_y=0;\quad \omega_z=\omega_1+\omega_2\cos\theta.$$

Определим проекции вектора кинетического момента на оси Ox, Oy, Oz, которые являются главными осями инерции для точки O. Получаем:

$$K_x=J_x\omega_x=J_x\omega_2\sin\theta;$$

$$K_y=J_y\omega_y=0;$$

$$K_z=J_z\omega_z=J_z(\omega_1+\omega_2\cos\theta).$$

Следовательно, кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O

$$\bar{K}_O=K_x\bar{i}+K_y\bar{j}+K_z\bar{k}=J_x\omega_2\sin\theta\,\bar{i}+J_z(\omega_1+\omega_2\cos\theta)\bar{k}. \tag{56}$$

Гироскопический момент $\bar{L}$ как момент сил инерции гироскопа можно вычислить по формуле

$$\bar{L}=-\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t=-\bar{u}_B.$$

При регулярной прецессии $\omega_1=\mathrm{const}$, $\theta=\mathrm{const}$, $\omega_2=\mathrm{const}$; следовательно, $K_x=\mathrm{const}$, $K_y=0$, $K_z=\mathrm{const}$, т. е. вектор кинетического момента $\bar{K}_O$ постоянен по модулю и изменяется только по направлению. Для того чтобы найти скорость конца этого вектора — точки B, надо знать угловую скорость вращения этого вектора вокруг неподвижной точки O.

Если рассмотреть плоскость, в которой лежат ось гироскопа Oz и ось прецессии Oz_1 (плоскость Oxz), то в случае регулярной прецессии ось прецессии Oz_1 является неподвижной. Лежащий в этой плоскости вектор $\bar{K}_O$ вращается вместе с этой плоскостью вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, направленной по этой оси. Таким образом, по формуле, аналогичной формуле Эйлера для скорости точки тела при его сферическом движении,

$$\bar{u}_B=\bar{\omega}_2\times\bar{K}_O.$$

Тогда

$$\bar{L}=-\bar{u}_B=-\bar{\omega}_2\times\bar{K}_O=\bar{K}_O\times\bar{\omega}_2. \tag{57}$$

Из формулы (57) следует, что момент $\bar{L}$ перпендикулярен плоскости Oxz, в которой лежат векторы $\bar{\omega}_2$ и $\bar{K}_O$, и, следовательно, параллелен оси Oy, совпадающей с линией узлов.

Если в (57) вместо $\bar{K}_O$ подставить его значение из (56), то

$$\bar{L}=J_x\omega_2\sin\theta(\bar{i}\times\bar{\omega}_2)+J_z(\omega_1+\omega_2\cos\theta)(\bar{k}\times\bar{\omega}_2).$$

Гироскопический момент

$$L=-J_x\omega_2^2\sin\theta\cos\theta+J_z(\omega_1+\omega_2\cos\theta)\omega_2\sin\theta=$$
$$=[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta]\omega_2\sin\theta, \tag{58}$$

так как

$$|\bar{i}\times\bar{\omega}_2|=\omega_2\cos\theta;\quad |\bar{k}\times\bar{\omega}_2|=\omega_2\sin\theta$$

и векторы $(\bar{i}\times\bar{\omega}_2)$ и $(\bar{k}\times\bar{\omega}_2)$ параллельны, но противоположны по направлению.

Приняв направление вектора $(\bar{k}\times\bar{\omega}_2)$ за положительное, после введения единичного вектора $\bar{\omega}_1^0=\bar{k}$ имеем

$$\bar{L}=[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta](\bar{\omega}_1^0\times\bar{\omega}_2). \tag{59}$$

Формула (59) является выражением для *вектора гироскопического момента при регулярной прецессии*. Гироскопический момент, как это следует из (59), можно разложить на две составляющие $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$, где

$$\bar{L}'=J_z\omega_1(\bar{\omega}_1^0\times\bar{\omega}_2)=J_z\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2; \tag{60}$$

$$\bar{L}''=(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta(\bar{\omega}_1^0\times\bar{\omega}_2). \tag{61}$$

Гироскопический момент $\bar{L}'$ совпадает с гироскопическим моментом, полученным по приближенной теории. Гироскопический момент $\bar{L}''$ является поправкой к гироскопическому моменту $\bar{L}'$ в случае точного вычисления кинетического момента при регулярной прецессии. Момент $\bar{L}''$ равен нулю, если $J_z=J_x$ (эллипсоид инерции является шаром), и при $\theta=90°$, т. е. когда ось гироскопа перпендикулярна оси прецессии.

Отметим, что $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$ направлена в одну сторону, если $(J_z-J_x)\cos\theta>0$, и в противоположные стороны при $(J_z-J_x)\cos\theta<0$.

Регулярная прецессия по инерции

В случае регулярной прецессии без действия внешних сил, т. е. регулярной прецессии по инерции, имеем

$$L=L_O^{(e)}=0.$$

Отсюда, учитывая (58), получаем

$$L=[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta]\omega_2\sin\theta=0$$

и, следовательно,

$$\omega_2=\frac{J_z\omega_1}{(J_x-J_z)\cos\theta}. \tag{62}$$

Таким образом, возможна регулярная прецессия по инерции с угловой скоростью, определяемой по формуле (62), если гироскоп не обладает шаровой симметрией $(J_z\neq J_x)$ и ось прецессии не перпендикулярна оси гироскопа.

Известно, что по инерции без действия сил может двигаться материальная точка с постоянной скоростью по прямой линии и вращаться твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью. К этим случаям следует добавить *случай регулярной прецессии гироскопа по инерции*.

Итак, регулярная прецессия может происходить по инерции и быть вынужденной, т. е. происходящей под действием внешних сил. В приближенной теории рассматривается только вынужденная прецессия. В точной теории регулярной прецессии рассматривают обе эти прецессии.

Регулярная прецессия тяжелого гироскопа

Для тяжелого гироскопа

$$L=L_O^{(e)}=Pl\sin\theta$$

и, учитывая значение L, из (58) получаем

$$[J_z\omega_1+(J_z-J_x)\omega_2\cos\theta]\omega_2\sin\theta=Pl\sin\theta.$$

Отсюда угловая скорость прецессии

$$\omega_2=\frac{-J_z\omega_1\pm\sqrt{J_z^2\omega_1^2+4(J_z-J_x)Pl\cos\theta}}{2(J_z-J_x)\cos\theta}. \tag{63}$$

Таким образом, регулярная прецессия тяжелого гироскопа возможна, если

$$J_z^2\omega_1^2+4(J_z-J_x)Pl\cos\theta>0. \tag{64}$$

Условие (64) выполняется, если величина $J_z\omega_1$ достаточно велика. В этом случае, вычислив приближенное значение квадратного корня из (63) по биному Ньютона, ограничиваясь первыми степенями малых величин, получаем

$$\sqrt{J_z^2\omega_1^2+4(J_z-J_x)Pl\cos\theta}=J_z\omega_1\left[1+\frac{4(J_z-J_x)Pl\cos\theta}{J_z^2\omega_1^2}\right]^{1/2}\approx$$
$$\approx J_z\omega_1\left[1+\frac{2(J_z-J_x)Pl\cos\theta}{J_z^2\omega_1^2}\right].$$

Подставляя значение этого выражения в (63) и беря верхний и нижний знаки перед корнем, имеем два приближенных значения угловой скорости прецессии:

$$\omega_2^{(1)}=\frac{Pl}{J_z\omega_1};\quad \omega_2^{(2)}=\frac{J_z\omega_1}{(J_x-J_z)\cos\theta}. \tag{65}$$

Прецессия с угловой скоростью $\omega_2^{(1)}$ — медленная прецессия. Такая угловая скорость прецессии получается и по приближенной теории. Прецессия с угловой скоростью $\omega_2^{(2)}$ — быстрая прецессия. Ее получают, как и прецессию по инерции. Тяжелый гироскоп при выполнении условия (64) может совершать две прецессии — медленную и быструю, близкие к рассмотренным двум прецессиям с угловыми скоростями $\omega_2^{(1)}$ и $\omega_2^{(2)}$.